

## Zadanie «Funkcje logiczne» (log)

### Wprowadzenie

Współczesne komputery są zbudowane z ogromnej liczby prostych elementów nazywanych bramkami logicznymi. Realizują one kilka elementarnych funkcji logicznych definiowanych w ramach działu matematyki nazywanego algebrą Boole’a. Funkcje logiczne operują na wartościach ze zbioru  $\{0, 1\}$  czasem utożsamianych z wartościami prawdy i fałszu. Trzy podstawowe funkcje logiczne to negacja (NOT), suma logiczna (OR) i iloczyn logiczny (AND). Wynikiem każdej z tych funkcji jest pojedyncza wartość ze zbioru  $\{0, 1\}$ . Funkcja określa, jak ów wynik (zwany też sygnałem wyjściowym) zależy od kombinacji zmiennych (sygnałów) wejściowych. Jednym ze sposobów definiowania funkcji logicznych jest tablica prawdy. W tablicy tej podaje się wszystkie kombinacje zmiennych wejściowych i odpowiadające im wartości funkcji.

**Negacja.** Funkcja negacji jest funkcją jednej zmiennej wejściowej  $x$  i opisuje ją tablica prawdy jak w tab. 1. Wynik funkcji negacji jest zawsze odwrotny do wartości sygnału

Tablica 1: Tablica prawdy dla funkcji negacji.

wejście	wynik funkcji NOT
$x$	$\bar{x}$
0	1
1	0

wejściowego  $x$ . Operację negacji oznacza się symbolicznie za pomocą kreski nad symbolem. Czyli, jeśli sygnał  $z$  jest wynikiem negacji sygnału  $x$ , skrótowo można to zapisać równaniem  $z = \bar{x}$ .

**Suma.** Funkcja sumy logicznej jest funkcją dwóch zmiennych wejściowych  $x$  i  $y$ , a opisuje ją tablica prawdy w tab. 2. Wynik sumy logicznej sygnałów wejściowych  $x$  i  $y$  jest zerem tylko wtedy, gdy obydwa sygnały wejściowe są zerami. Jeśli co najmniej jeden sygnał wejściowy przyjmuje wartość 1, suma logiczna tych sygnałów będzie równa 1. Operację sumy logicznej zapisuje się symbolem  $+$ . Jeżeli  $z$  oznacza sygnał wyjściowy, będący sumą logiczną sygnałów  $x$  i  $y$ , to skrótowo można to zapisać jako  $z = x + y$ .

Tablica 2: Tablica prawdy dla funkcji OR.

wejścia		wynik funkcji OR
$x$	$y$	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**Iloczyn.** Funkcja iloczynu logicznego jest funkcją dwóch zmiennych wejściowych  $x$  i  $y$ , a opisuje ją tablica prawdy jak w tab. 3. Wynik iloczynu logicznego sygnałów wejściowych  $x$  i  $y$  jest jedynką tylko wtedy, gdy obydwa sygnały wejściowe są równe 1. Jeśli co najmniej jeden sygnał wejściowy przyjmuje wartość 0, iloczyn logiczny tych sygnałów będzie równy 0. Operację iloczynu logicznego reprezentuje symbol kropki  $\cdot$ . Jeżeli  $z$  oznacza sygnał wyjściowy, będący iloczynem logicznym sygnałów  $x$  i  $y$ , to skrótowo można to zapisać jako  $z = x \cdot y$ .

Tablica 3: Tablica prawdy dla funkcji AND.

wejścia		wynik funkcji AND
$x$	$y$	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Minimalizacja.** Ponieważ zwykle im układ prostszy i złożony z mniejszej liczby bramek, tym jest bardziej niezawodny, dąży się do wyrażenia złożonych funkcji logicznych za pomocą jak najmniejszej liczby operacji elementarnych. Proces poszukiwania takiej postaci jest nazywany minimalizacją formuły funkcji logicznej. Efektem minimalizacji jest postać funkcji logicznej złożona z jak najmniejszej liczby operacji elementarnych. Często istnieje wiele jednakowo dobrych rozwiązań. Np. dla funkcji 3 zmiennych wejściowych  $a, b, c$  podanej tablicą prawdy jak w tab. 4 można podać kilka rozwiązań o tej samej liczbie operacji elementarnych.

Takimi równoważnymi rozwiązaniami są:

- $z = \bar{a} \cdot \bar{c} + a \cdot c$

Tablica 4: Tablica prawdy dla funkcji trzech zmiennych.

wejścia			wynik funkcji
$a$	$b$	$c$	$z$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- $z = (\bar{a} + c) \cdot (a + \bar{c})$

Warto zauważyć, że w tym przypadku wynik w ogóle nie zależy od stanu sygnału wejściowego  $b$ .

### Zadanie

Funkcję logiczną podaną za pomocą tablicy prawdy (tab. 5) zapisać w postaci wyrażenia logicznego o możliwie najmniejszej liczbie operacji dwuargumentowych OR i AND oraz operacji negacji NOT. Rozwiązanie przedstawić w postaci funkcji logicznej  $z = f(a, b, c, d, e)$ .

### Ustalenia techniczne

1. Rozwiązanie należy przygotować w pliku o nazwie **IKU-log.pdf**, gdzie IKU jest *indywidualnym kodem uczestnika*. Rozmiar pojedynczego pliku nie może przekraczać 5 MB.
2. W lewym górnym rogu rozwiązania należy umieścić numer IKU i kod zadania: «log». Nie jest dopuszczalne umieszczanie w pliku jakichkolwiek innych danych umożliwiających zidentyfikowanie uczestnika (także we właściwościach pliku).
3. Zadanie należy przesłać przez stronę konkursu «Złoty Indeks» Platformy Zdalnej Edukacji korzystając z łącza do przesyłania rozwiązań zadania «log».
4. Zadanie jest oceniane w skali 0-15 punktów.

Tablica 5: Tablica prawdy dla zadania.

wejścia					wyjście
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>z</i>
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1