



**Politechnika Śląska w Gliwicach**  
**Konkurs "O złoty indeks Politechniki Śląskiej"**  
**edycja 2020/2021**  
**Zadania z matematyki - etap I**

**Zadanie 1.** Na stole znajduje się  $n$  monet. Dwaj gracze zabierają na przemian ze stołu monety, przy czym w każdym ruchu mogą zabrać dwie lub trzy monety na raz. Gracz, któremu przed jego ruchem zostaną na stole mniej niż dwie monety, przegrywa. Dla jakich liczb  $n \in \mathbb{N}$  gracz pierwszy może sobie zapewnić wygraną bez względu na grę przeciwnika?

**Zadanie 2.** Udowodnij, że dla każdej pary liczb  $(x, y)$  zachodzi nierówność:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 6)^2} + \sqrt{(x - 8)^2 + y^2} \geq 12.$$

**Zadanie 3.** Rozwiąż nierówność:

$$\cos x + \frac{4}{3} \cos^3 x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cos^5 x + \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cos^7 x + \dots \geq 3 \sin x.$$

**Zadanie 4.** Niech  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Tworzymy skończony ciąg w następujący sposób: pierwszym wyrazem naszego ciągu jest  $(0, 0, 0)$ , a każdy następny uzyskujemy z poprzedniego poprzez dodanie 1 do dowolnej z trzech współrzędnych ostatniego wyrazu. Ostatnim elementem ciągu jest  $(a, b, c)$ . Oblicz ile jest wszystkich takich ciągów w zależności od wartości  $a, b, c$ .